L'Istituto Primo Levi di Vignola
Scuola-Polo per la formazione dell'Ambito 11 Emilia Romagna

La matematica e la fisica del discreto

Esperto: Andrea Spagni

- Liceo Scientifico «A.F. Formiggini» Sassuolo (MO)
- Docente a contratto per il corso di Fisica I nel corso di Laurea in «Ingegneria Meccatronica» presso il D.I.S.M.I dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
- Dall'A.A. 2000-2001 fino all'A.A. 2014-2015 (Didattica della Fisica nei corsi S.S.I.S. e T.F.A.)

“In matematica è sempre consigliabile arrivare ad un’idea per più strade, per non confondere quest’idea con la strada che ci ha condotti ad essa”

G. Arrigo

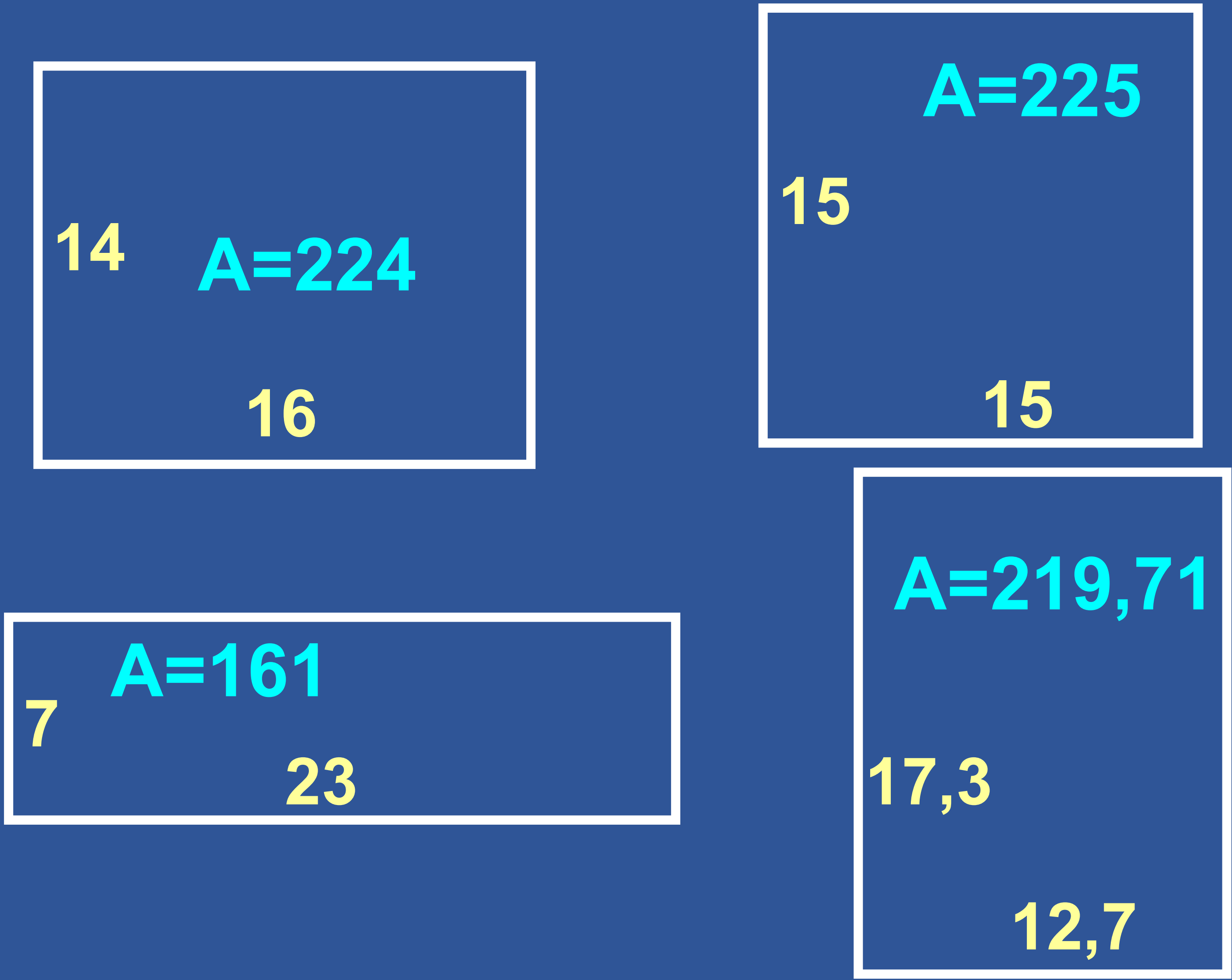
Lezione del 15-10-2020

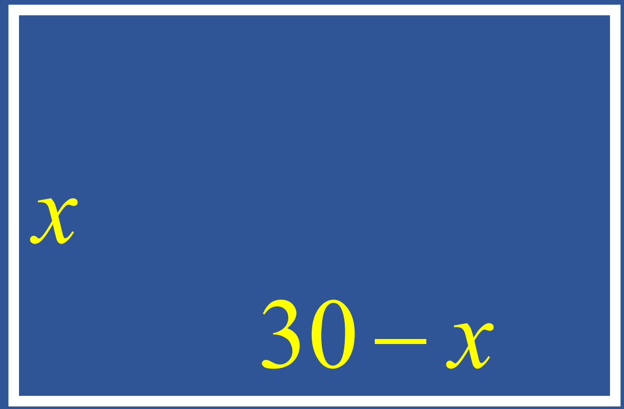
"Si esamineranno problemi "a stati finiti" al fine di implementare procedure di soluzione non convenzionali (diverse da quelle di solito richieste nel curricolo scolastico), molto utili nei problemi proposti alle competizione di Giochi Matematici. In particolare si proporrà un approccio al calcolo combinatorio assolutamente elementare che, opportunamente graduato, può essere proposto fin dal primo anno di superiori (se non al terzo anno delle scuole medie): Non inganni l'elementarietà dell'approccio: si riotterrano tutti i risultati tradizionali del calcolo combinatorio inserendoli però in un contesto di «problem solving», anziché riducendoli alla sterile applicazione di soluzione di casi codificati. "

Problema a stati infiniti (tipici del curricolo)

La teoria delle equazioni sviluppate nel curricolo scolastico ha lo scopo di fornire un metodo di soluzione di problemi risolti con l'introduzione dell'incognita nei quali la soluzione può assumere un numero infinito di valori. Essi non possono ovviamente essere risolti per tentativi, cercando di «divinare» il valore dell'incognita che risolve il problema. Esempi tipici sono problemi del tipo:

- Si vuole recintare un orto (rettangolare) avendo a disposizione 60 metri di rete. Volendo che l'orto occupi un'area di 214,76m^2 quali saranno le dimensioni dell'orto ?
- Sapresti trovare, avendo a disposizione gli stessi 60 metri di recinzione, l'orto avente area massima?


14
A=224
16
A=225
15
15
A=161
7
23
A=219,71
17,3
12,7



$$(30 - x) \cdot x = 214{,}78$$

Una storiella istruttiva

Due matematici (A e B.), vecchi compagni di studi, si incontrano dopo molti anni e si scambiano informazioni sulle rispettive famiglie. Il dialogo potrebbe essere il seguente:

A: “ Io non mi sono mai sposato…e tu?”

B: ” Io sono sposato da molti anni e ho tre figli”

A: “ Quanti anni hanno ?”

B: “Non te lo dico, ma in nome dei vecchi tempi, ti dirò che il prodotto delle loro età è di 36”

A: “O.K. ma ciò non mi sembra sufficiente a rispondere”

B: “Ti dirò di più: la somma delle loro età è uguale al numero di linea quell’autobus che sta passando”.

Il matematico A legge il numero dell’autobus ma ancora non risponde. Allora il matematico B afferma: “La figlia più grande ha gli occhi azzurri”

A questo punto, sorprendentemente, il Matematico A dice:

A: “Ora finalmente ho capito !!”

Quanti anni hanno i tre figli di B ?

Problemi a stati finiti

1	1	36	Somma = 38
1	2	18	Somma = 21
1	3	12	Somma = 16
1	4	9	Somma = 14
1	6	6	Somma = 13
2	2	9	Somma = 13
2	3	6	Somma = 11
3	3	4	Somma = 10

Un problema economico

- Per produrre qualcosa spendo 100 euro al pezzo. In più ho dei costi fissi pari a 600 euro
- Quando lo rivendo faccio pagare ogni pezzo 200 euro se ne vendo 1, 198 se ne vendo 2 , 196 se ne vendo 3, ecc…
- Quanti pezzi devo vendere per avere il guadagno massimo ?

X=quantità	Costo (x)	Prezzo(x)	Ricavo(x)	Guadagno(x)
1	700	200	200	-500
2	800	198	396	-404
3	900	196	588	-312
4	1000	194	776	-224
5	1100	192	960	-140
6	1200	190	1140	-60
7	1300	188	1316	16
8	1400	186	1488	88
9	1500	184	1656	156
…	…	…	…	…
21	2700	160	3360	660
22	2800	158	3476	676
23	2900	156	3588	688
24	3000	154	3696	696
25	3100	152	3800	700
26	3200	150	3900	700
27	3300	148	3996	696
28	3400	146	4088	688
29	3500	144	4176	676
30	3600	142	4260	660

Un problema di attualità

Qualche giorno fa era il 5 ottobre 2020, cioè il 05/10/20.

Come si vede il giorno , il mese e l’anno sono in progressione geometrica; quante altre volte capiterà entro il 2100 ?

Un caso di corruzione

Il grande comune di Arrafonia ha tra i propri dipendenti 25 Ingegneri, 12 Architetti, 8 Geometri, 30 Avvocati. Si deve costituire una Commissione Edilizia costituita da 4 Ingegneri, 3 Architetti, 2 Geometri e 5 Avvocati: la Commissione verrà costituita per sorteggio.
Il giorno prima del sorteggio, viene arrestato un dipendente comunale (con contatti con il «mondo di mezzo») perché trovato in possesso di un biglietto che riporta la possibile composizione della commissione edilizia. Anziché intervenire subito il magistrato lascia che il sorteggio avvenga e, guarda un po', la commissione della Commissione coincide in tutto e per tutto con quella riportata sul «pizzino» del faccendiere.
Interrogato sulla «coincidenza» il faccendiere si giustifica dicendo: «era un gioco che facevamo tra noi dipendenti, per indovinare l'esito del sorteggio. Chi indovinava il maggior numero di componenti, vinceva 100 euro !! ».

Perchè possiamo essere praticamente certi che il dipendente comunale è un corrotto ?

Per problemi «a stati finiti» è indispensabile sapere enumerare tutte le possibili configurazioni del problema ed individuare tra di esse la soluzioni cercata.

1) Se il numero di casi possibili è piccolo si può procedere alla semplice enumerazione (come fatto nei problemi precedenti)

2) Se il numero di casi è elevato dobbiamo ricorrere alle tecniche del **calcolo combinatorio**

Lo strano destino del calcolo combinatorio

- Nonostante il calcolo combinatorio includa il concetto fondativo di ogni approccio matematica alla realtà (il contare), esso spesso non viene sviluppato nei primi anni delle superiori e viene relegato al ruolo di «prerequisito» del calcolo delle probabilità (spesso affrontato negli ultimi anni).

- Molti Docenti hanno un sovrano terrore del calcolo combinatorio avendo il timore di non riuscire a svolgere gli esercizi del libro e di essere messi in difficoltà da studenti che lo hanno interiorizzato (anche se in modo non formalizzato).

- Il calcolo combinatorio è senz'altro insidioso (non lo nego) ma spesso dietro l'insicurezza di molti Docenti si cela un approccio eccessivamente formalistico che cerca di rinvenire negli esercizi le strutture di enumerazione dei casi codificate (permutazioni, disposizioni, combinazioni, ecc..) , trascurando il fatto che tali strutture discendono da due semplici principi fondamentali

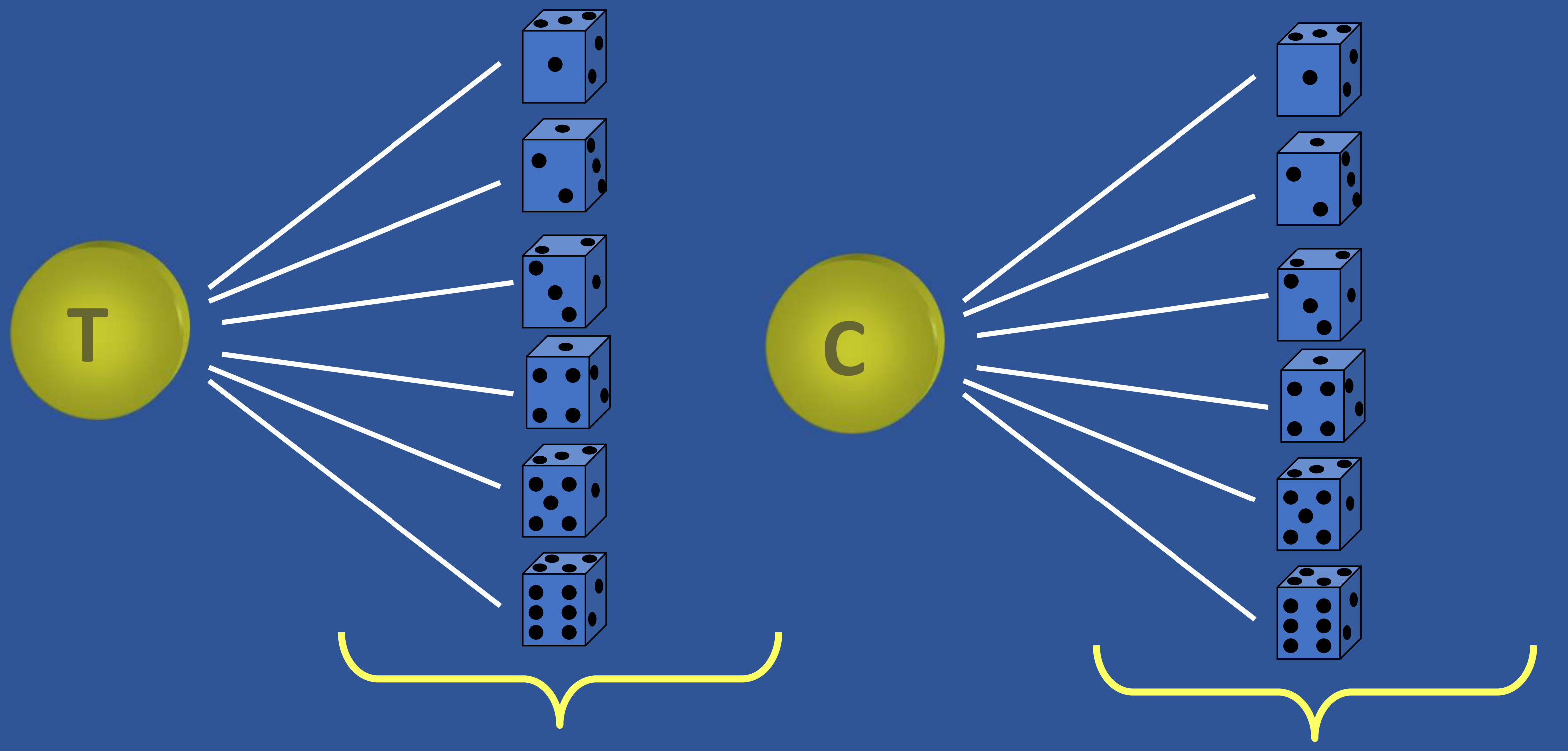
I principio del calcolo combinatorio

Se un evento E è costituito dal verificarsi di *k* fasi E_1, $E_2 \ldots E_k$ ciascuna delle quali può verificarsi in n_1, $n_2 \ldots n_k$ modi

n_1	n_2	n_3	n_4	…	n_k

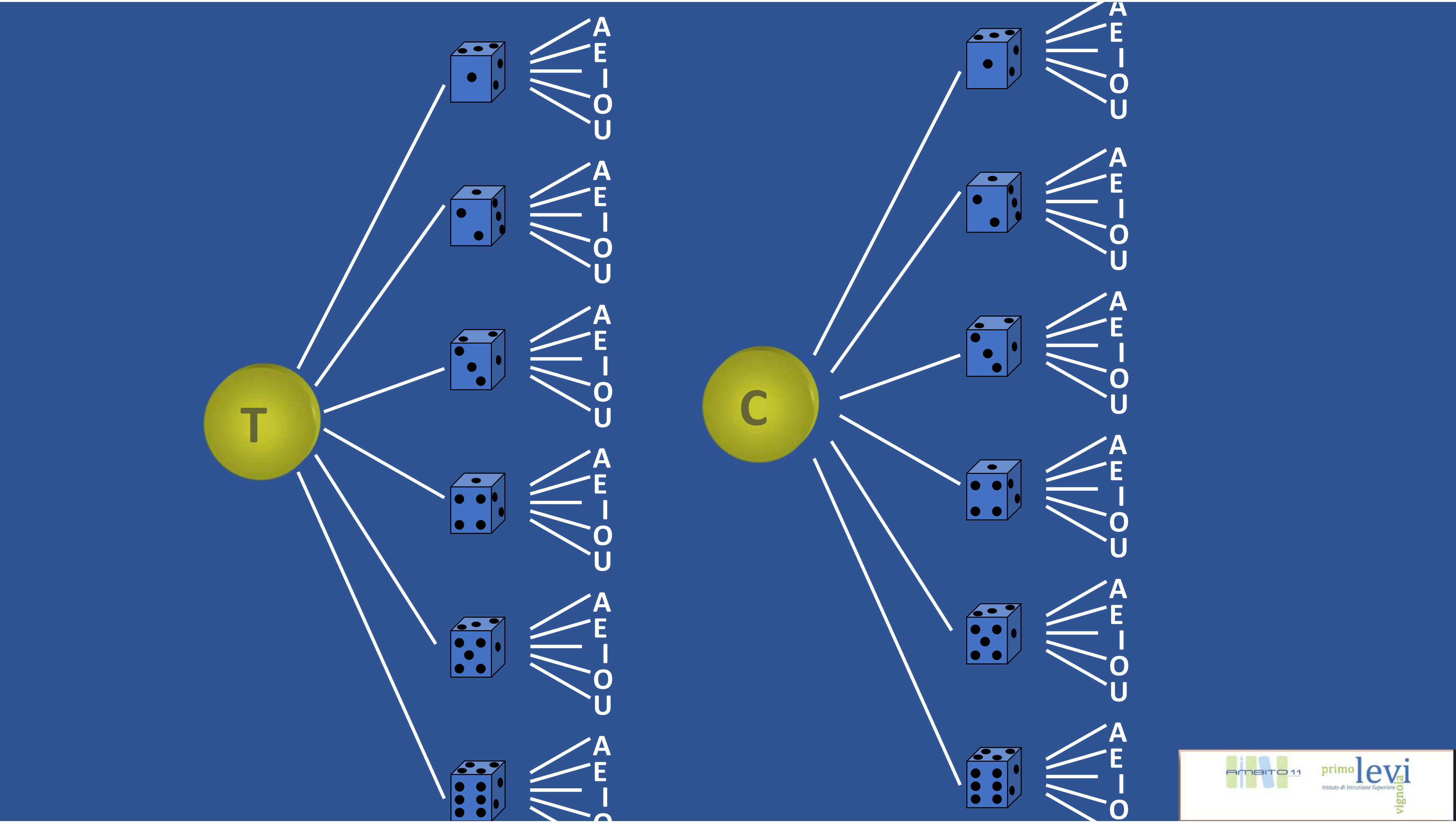
allora l'evento E può verificarsi in

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \text{ modi}$$



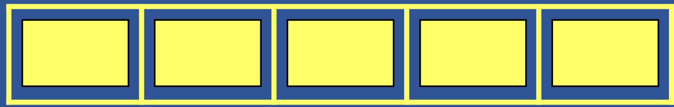
6 casi + **6 casi**

= 12 casi


T
C
A
E
I
O
U

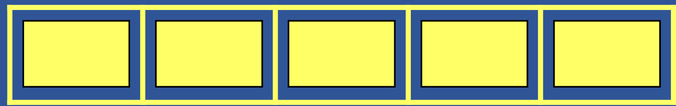
Lucchetto a combinazione:

Ogni cifra può avere qualsiasi valore



$$10^5 = 100'000$$

La prima cifra deve essere pari, la seconda dispari, la terza e la quarta diverse dalle prime due e tra loro e l'ultima uguale alla prima



$$n = 25 \times 8 \times 7 = 1400$$

Nelle varie caselle , che rappresentano le varie fasi del costituirsi della combinazione, non mettiamo il numero scelto, ma il **<u>numero di modi in cui possiamo scegliere tale numero</u> !!**

In generale:

Il principio del calcolo combinatorio

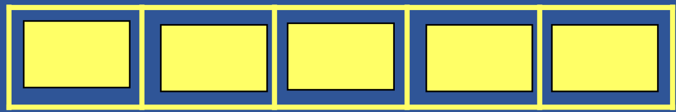
Se un evento E è costituito dal **verificarsi alternativo** di eventi E_1, $E_2 \ldots E_k$ ciascuno dei quali può verificarsi in n_1, $n_2 \ldots n_k$ modi allora l'evento E può verificarsi in

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k \quad \text{modi}$$

Lucchetto a combinazione:

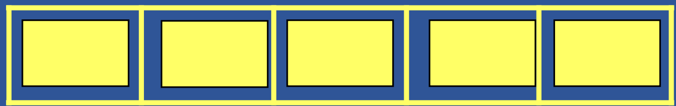
E' noto che la prima cifra è 8 oppure 6;

quando la combinazione inizia per 8 le altre cifre sono tutte distinte dalla prima e fra loro;



$$n_I = 1\times 9x8\times 7x6 = 3024$$

Quando la prima cifra è 6 , la seconda è pari e distinta dalla prima, le altre tre sono dispari e diverse tra loro



$$n_{II} = 1\times 4x5\times 4x3 = 240$$

Il numero totale di combinazioni è la somma:

$$n_{tot} = 3024 + 240 = 3264$$

Permutazioni: In quanti modi posso far sedere sette persone su sette sedie ?

7	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

N° di modi: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$

$7! = 5040$ sui libri $P_n = n!$

N.B. $32! \sim 2{,}6 \cdot 10^{35} = 26\underbrace{00000000000000000\ldots}_{\text{34 zeri}}$

Disposizioni semplici di n oggetti su k posti (con k<n)

Quanti possibili podi vi sono in una gara con 21 concorrenti ?

N.B. «L'ordine conta !»

$$21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$$

Sui libri di testo la disposizione di 21 oggetti (i concorrenti) su 3 posti (i gradini del podio) viene indicata con:

$$D_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = \frac{21!}{18!}$$

Generalizzando la disposizione di n oggetti su k posti è data da:

$$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fattori}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione di n oggetti su k posti (con k non necessariamente minore di n)

Quante parole di 7 lettere posso scrivere usando le 5 vocali?

N.B. Le vocali si possono ripetere.

$$\overbrace{5\cdot 5\cdot \ldots \cdot 5}^{7\ \text{volte}} = 5^7 = 78125$$

Sui libri di testo la disposizione di 5 oggetti (le vocali) sui 7 posti (la lunghezza della parola) viene indicata con:

$$D_{5,7}^{(r)} = 5^7$$

Generalizzando la disposizione con ripetizione di n oggetti su k posti è data da:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Combinazioni semplici di n oggetti presi k a k (con $k \leq n$)

Quanti gruppi di 3 studenti (da mandare ad una conferenza) posso scegliere in una classe di 26 studenti ?

N.B. Stavolta l'ordine non conta !! Mandare alla conferenza Tizio, Caio e Sempronio è come mandare alla conferenza Caio, Sempronio e Tizio.

- *Iniziamo con lo scegliere gli studenti: il primo lo posso scegliere in 26 modi, il secondo in 25 modi e il terzo in 24 modi. Quindi il risultato parrebbe essere il solito*

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$$

- *Ma attenzione: permutando su 3 posti i tre studenti scelti essi rappresentano sempre il medesimo gruppo ! Ogni gruppo viene contato per 3! volte. Il risultato corretto è quindi:*

$$\frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2600$$

Combinazioni semplici di n oggetti presi k a k (con k≤n)

E’ importante osservare che abbiamo ottenuto la combinazione di 26 oggetti scelti tre a tre, prima scrivendo le disposizioni e poi dividendo per il numero di volte che lo stesso gruppo veniva contato. In generale vale quindi:

$$C_{26,3} = \frac{D_{26,3}}{3!} = \frac{26!}{(26-3)!3!} = \binom{26}{3}$$

ove si è usato il simbolo $\binom{26}{3} = C_{26,3}$ detto coefficiente binomiale.

Generalizzando la combinazione semplice di n oggetti presi k a k è indicata con:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Un po' di enigmistica: Il problema degli anagrammi (1)

Per anagramma di una parola si intende una parola scritta con le medesime lettere della parola iniziale: ad esempio TEATRO è, sorprendentemente, anagramma di ATTORE. Ma anche la parole TAORET è un'anagramma di ATTORE (agli anagrammi «matematici» non si richiede di avere senso compiuto!)

- Quanti anagrammi ha la parola RUOTA ?

…e la parola MATEMATICA ?

Nel primo caso conosciamo già la risposta: si tratta di permutare le 5 lettere (distinte) di RUOTA e il gioco è fatto ! La risposta è quindi:

$$5!$$

Un po' di enigmistica: Il problema degli anagrammi (2)

Nel secondo caso c'è un problema: la parola MATEMATICA contiene:

- tre volte la lettere A
- due volte la lettera M
- due volte la lettera T

Se scambiamo le due T otteniamo il medesimo anagramma; idem se scambiamo le due M, se permutiamo sui loro 3 posti le 3 A. E' facile convincersi che ora la soluzione è data da:

$$\frac{10!}{\underbrace{2!}_{T}\cdot\underbrace{2!}_{M}\cdot\underbrace{3!}_{A}}=151.200$$

Varianti al problema degli anagrammi (uso della simmetria e del calcolo delle probabilità)

Data la parola MATEMATICA,

1) Quanti iniziano con le tre A consecutive?
2) Quanti anagrammi hanno la I che precede la C ?
3) Quanti iniziano con la lettera M ?
4) Quanti iniziano e terminano con vocale ? (casi «degeneri e non»)
5) Quanti iniziano con una consonante ? (usa la simmetria)
6) Quanti iniziano con una doppia vocale ? (casi «degeneri e non»)

Tracce di Soluzione

1) Considera il gruppo delle tre A consecutive come un'unica nuova lettera . Dopodiché…

2) Per simmetria per ogni anagramma in cui la I precede la C, ve ne uno in cui la C precede la I… (basta scambiarle di posto). Quindi il numero totale è…

3) La M è congelata in prima posizione; quindi anagramma le altre lettere… (oppure usa il calcolo delle probabilità)

Varianti al problema degli anagrammi (uso della simmetria e del calcolo delle probabilità)

Data la parola MATEMATICA,

1) Quanti iniziano hanno le tre A consecutive ?
2) Quanti anagrammi hanno la I che precede la C ?
3) Quanti iniziano con la lettera M ?
4) Quanti iniziano e terminano con vocale ? (casi «degeneri e non»)
5) Quanto iniziano con una consonante ? (usa la simmetria)
6) Quanti iniziano con una doppia vocale ? (casi «degeneri e non»)

Tracce di Soluzione

4) Esaminiamo i vari casi disgiunti A…..A o A…..E o A…..I o E…I e poi usiamo la simmetria e il II secondo principio del calcolo combinatorio

$$A \ldots ..A \Rightarrow N_1 = \frac{8!}{2!2!}$$

$$A \ldots ..E \Rightarrow N_2 = \frac{8!}{2!2!2!} \cdot 2$$

$$A \ldots ..I \Rightarrow N_3 = \frac{8!}{2!2!2!} \cdot 2$$

$$E \ldots ..I \Rightarrow N_4 = \frac{8!}{3!2!2!} \cdot 2$$

5) Le consonanti sono tante quante le vocali…

Varianti al problema degli anagrammi (uso della simmetria e del calcolo delle probabilità)

Data la parola MATEMATICA,

1) Quanti iniziano hanno le tre A consecutive ?
2) Quanti anagrammi hanno la I che precede la C ?
3) Quanti iniziano con la lettera M ?
4) Quanti iniziano e terminano con vocale ? (casi «degeneri e non»)
5) Quanto iniziano con una consonante ? (usa la simmetria)
6) Quanti iniziano con una doppia vocale ? (casi «degeneri e non»)

Tracce di Soluzione

6) Esaminiamo i vari casi disgiunti AA….. o AE o AI….. o EI… (oppure il calcolo delle probabilità)

$$AA\ldots\ldots \Rightarrow N_1 = \frac{8!}{2!2!}$$

$$AE\ldots\ldots \Rightarrow N_2 = \frac{8!}{2!2!2!}\cdot 2$$

$$AI\ldots\ldots \Rightarrow N_3 = \frac{8!}{2!2!2!}\cdot 2$$

$$EI\ldots\ldots \Rightarrow N_4 = \frac{8!}{3!2!2!}\cdot 2$$

Perché il problema degli anagrammi è importante ?

Molti problemi di calcolo combinatorio sono «isomorfi» (cioè hanno la stessa forma) del problema degli anagrammi.

- Quante colonne del Totocalcio contengono 3 volte X, 6 volte 1 e 4 volte 2 ?

Soluzione: è come scrivere una parola del tipo X22X1111X2211 contenente 3 volte X, 6 volte 1 e 4 volte 2. Anagrammandola abbiamo:

$$\frac{13!}{3! \cdot 4! \cdot 6!}$$

- Avendo a disposizione 6 perline rosse, 4 perline bianche e 3 perline verdi , in quanti modi posso ordinarle ?

Soluzione: è come scrivere una parola del tipo VBBVRRRRVBBRR11 contenente 3 volte X, 6 volte 1 e 4 volte 2. Anagrammandola abbiamo:

$$\frac{13!}{3! \cdot 4! \cdot 6!}$$

Perché il problema degli anagrammi è importante ?

Avendo a disposizione 6 perline rosse, 4 perline bianche e 3 perline verdi , in quanti modi posso ordinarle ? E se vogliamo chiudere la fila di perline a formare una collana con un nodo invisibile, quante diverse collane si possono costruire ?

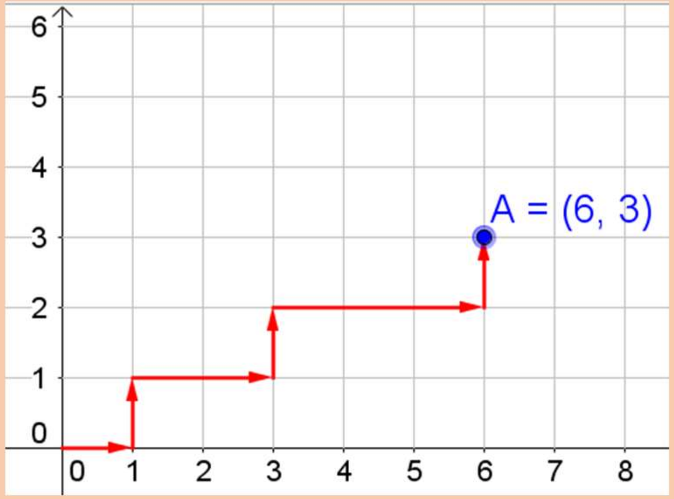
Soluzione: Occorre tener conto del fatto che chiudendo la fila diventano indistinguibili collane che differiscono solo per il punto di partenza (**permutazioni circolari**) ed inoltre la stessa collana può essere allacciata in due modi.

$$\frac{N_{tot}\ \text{collane aperte}}{N_{\text{punti di partenza}} \cdot N_{\text{modi allaccio}}} = \frac{\dfrac{13!}{3!\cdot 4!\cdot 6!}}{13 \cdot 2}$$

Perché il problema degli anagrammi è importante ?

- Supponiamo di partire dall'origine O di un sistema di riferimento cartesiano e di poterci muovere o a destra D o in su con passi di lunghezza uguale a 1. Quanti possibili percorsi vi sono per raggiungere il punto P(6;3) ? Quanti di questi passano per il punto B(3;2) ?

Soluzione: Il trucco consiste nell'instaurare un corrispondenza biunivoca tra percorsi e modi di descriverlo. Ad esempio il percorso in figura corrisponde alla parola DSDDSDDDS (con D=destra e S=su).



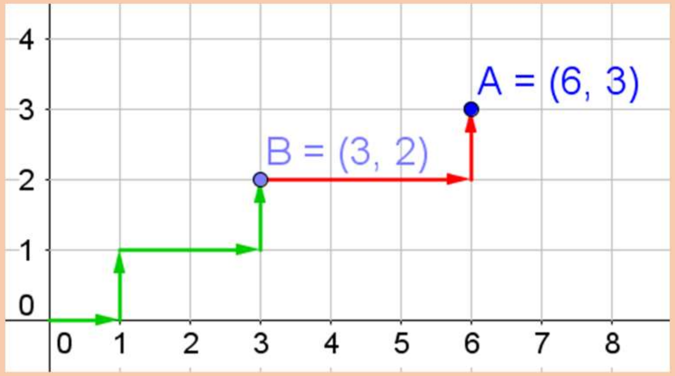
Ed altrettanto che ovvio che ad ogni parola contenente 6 D e 3 S corrisponde un percorso. Il numero di percorsi possibili è quindi

$$\frac{9!}{6!\ \cdot 3!} = 84$$

Perché il problema degli anagrammi è importante ?

- Supponiamo di partire dall'origine O di un sistema di riferimento cartesiano e di poterci muovere o a destra D o in su con passi di lunghezza uguale a 1. Quanti possibili percorsi vi sono per raggiungere il punto P(6;3) ? Quanti di questi passano per il punto B(3;2) ?

Soluzione: Per rispondere alla seconda domanda dividiamo il percorso in due sottopercorsi (da O a B e da B a A) usando poi il primo principio fondamentale del calcolo combinatorio.



$$\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{3!} = 40$$

Un caso di corruzione (soluzione)

Il grande comune di Arrafonia ha tra i propri dipendenti 25 Ingegneri, 12 Architetti, 8 Geometri, 30 Avvocati. Si deve costituire una Commissione Edilizia costituita da 4 Ingegneri, 3 Architetti, 2 Geometri e 5 Avvocati: la Commissione verrà costituita per sorteggio.

Quante possibili Commissioni edilizie si possono formare?

$\underbrace{\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{4!}}_{\text{Numero di modi di scegliere gli Ingegneri}}$	$\underbrace{\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!}}_{\text{Numero di modi di scegliere gli Architetti}}$	$\underbrace{\frac{8\cdot 7}{2!}}_{\text{Numero di modi di scegliere i Geometri}}$	$\underbrace{\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{5!}}_{\text{Numero di modi di scegliere gli Avvocati}}$

$$N=\binom{25}{4}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{30}{5}\cong 11.104 \text{ miliardi}$$

Combinazioni con ripetizione di n tipi di oggetti presi k a k

Un pasticciere vende quattro tipi di paste: cannoli, bignè, sfogliatelle, babà. In quanti modi diversi è possibile comperare 7 paste?

N.B. Si potrebbero anche prendere 7 paste tutte dello stesso tipo !! Il problema sembra di una difficoltà insormontabile. Trucco!! Elenchiamo 7 oggetti (con la X) e introduciamo un elemento separatore (|).

$$\underbrace{X}_{\text{cannoli}} \;|\underbrace{X\,X}_{\text{bignè}}|\underbrace{X\,X\,X}_{\text{sfog.}}|\;\underbrace{X}_{\text{babà}} = 1 \text{ cannolo, 2 bignè, 3 sfogliatelle e 1 babà}$$

$$|\,XXXX\,|\,|XXX = 0 \text{ cannoli, 4 bignè, 0 sfogliatelle e 3 babà}$$

Se consideriamo una configurazione del vassoio come una parola di 10 lettere con 7 X e 3 | , allora sappiamo già, dal problema degli anagrammi, che:

$$N = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120 \text{ vassoi}$$

Combinazioni con ripetizione di n tipi di oggetti presi k a k

Usando la tecnica della slide precedente prova a chiederti:

1. in quanti modi posso scegliere quattro numeri naturali (compreso lo zero) *x,y,z,t* in modo che la loro somma sia 50.

Soluzione:
Basta posizionare 50 elementi con tre elementi separatori. La soluzione è quindi data dal numero di anagrammi di una parola che contiene 50 elementi X e 3 elementi separatori. Si ha pertanto:

$$\frac{53!}{50! \cdot 3!} = 23426$$

Combinazioni con ripetizione di n tipi di oggetti presi k a k

Una variante del problema precedente è:

In quanti modi posso scegliere quattro numeri naturali (compreso lo zero) *x,y,z,t* in modo che la loro somma sia 50 con il vincolo che i naturali *x,y,z,t siano* strettamente positivi (cioè non possano essere nulli) ?

Soluzione

Nel problem solving l'abilità del solutore sta nel ricondursi ad un problema noto ! Se poniamo

$$x = h+1 \quad y = i+1 \quad z = j+1 \quad t = k+1 \quad \text{con } h, i, j, k \text{ numeri non negativi}$$

chiedersi

$$x+y+z+t = 50 \quad \text{con } x, y, z, t \in \mathrm{N}^{+}$$

è come chiedersi

$$h+1+i+1+j+1+k+1 = 50 \Rightarrow h+i+j+k = 46 \quad \text{con h}, i, j, k \in \mathrm{N}$$

Ma allora la soluzione è (46 elementi con 3 separatori)

$$\frac{49!}{46! \cdot 3!} = 18424$$

Combinazioni con ripetizione di n tipi di oggetti presi k a k

Altre Varianti (da risolvere con il cambio di variabile)

1. Un pasticciere vende quattro tipi di paste: cannoli, bignè, sfogliatelle, babà. In quanti modi diversi è possibile comperare 12 paste con la condizione che vi siano almeno 2 bignè 3 cannoli?

2. In quanti modi è possibile scegliere quattro **numeri naturali pari** in modo che la loro somma dia 50 ?

3. In quanti modi è possibile scegliere quattro numeri naturali (**2 pari e 2 dispari**) in modo che la somma sia 50 ?

Altri problemi di ordinamento

E dato un gruppo di 9 cifre (cinque 0 e quattro 1): in quanti possiamo metterli in fila in modo che non vi siano mai due 1 vicini ?

Soluzione
Disponiamo dapprima gli zeri lasciando tra due zeri uno spazio per inserire, eventualmente, un solo uno. Ovviamente l'uno può essere inserito anche prima dello zero all'estrema sinistra della fila o dopo la zero all'estremità destra della fila:

$$\ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots$$

Vi sono quindi 6 spazi in cui inserire i quattro 1: il numero di modi in cui inserire i quattro 1 è pertanto:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ modi}$$

Altri problemi di ordinamento

E dato un gruppo di 9 persone (5 donne e 4 uomini): in quanti possiamo metterli in fila in modo che non vi siano mai due uomini vicini ?

Soluzione

Disponiamo dapprima le donne lasciando tra due donne uno spazio per inserire, eventualmente, un solo uomo. Ovviamente l'uomo può essere inserito anche prima della donna all'estrema sinistra della fila o dopo la donna all'estremità destra della fila:

$$\ldots D \ldots D \ldots D \ldots D \ldots D \ldots$$

Vi sono quindi 6 spazi in cui inserire i quattro uomini: il numero di modi in cui inserire i quattro uomini è pertanto:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ modi}$$

Occorre, rispetto al problema precedente, poi tener conto del fatto che gli uomini e le donne hanno loro distinta individualità. Occorre tener quindi conto dei 5!=120 di permutare le 5 donne e dei 4!=24 modi di permutare i 4 uomini. Il risultato finale è pertanto:

$$15 \cdot 120 \cdot 24 = 43200$$

Altri problemi di ordinamento

E dato un gruppo di 9 persone (5 donne e 4 uomini): qual è la probabilità che disponendoli in fila, non vi siano mai due uomini vicini ?

Soluzione
Il numero di possibili file è 9!= 362880, il numero di fila senza uomini vicini è, per l'esercizio precedente, 43200. La probabilità è pertanto:

$$p = \frac{43200}{362880} = \frac{5}{42}$$

Scomposizione in fattori primi

Ogni numero intero *x* può essere scomposto in un unico modo in fattori primi, cioè può scriversi nella forma

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \text{ con } p_1, p_2, p_3 \ldots \text{ numeri primi e } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow x^2 = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots)^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot p_3^{2\alpha_3} \ldots$$

$$\Rightarrow x^3 = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots)^3 = p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2} \cdot p_3^{3\alpha_3} \ldots$$

- Cioè gli esponenti della scomposizione in fattori primi di un **quadrato perfetto** sono tutti multipli di due (pari)
- Cioè gli esponenti della scomposizione in fattori primi di un **cubo perfetto** sono tutti multipli di tre,
- … e così via.

as1

Contiamo i divisori di un numero

Ogni numero intero *x* può essere scomposto in un unico modo in fattori primi, cioè può scriversi nella forma

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \text{ con } p_1, p_2, p_3 \ldots \text{numeri primi e } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \in \mathbf{N}$$

Dato il numero x fattorizzato come sopra, un suo divisore è della forma:

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \ldots \text{ con } p_1, p_2, p_3 \ldots \text{ numeri primi e } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \in \mathbf{N}$$

$$\text{con} \begin{cases} 0 \le \beta_1 \le \alpha_1 \\ 0 \le \beta_2 \le \alpha_2 \\ 0 \le \beta_3 \le \alpha_3 \\ \ldots. \end{cases}$$

Il numero β_1 può essere scelto in α_1+1 modi

Il numero β_2 può essere scelto in α_2+1 modi

Il numero β_3 può essere scelto in α_3+1 modi

…….

Il numero di divisori di x è quindi dato da

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \ldots$$

Diapositiva 44

as1 andrea spagni; 29/10/2018

Iterazione e ricorsione sono sinonimi ?

Finora abbiamo usato i termini ricorsione ed iterazione in modo sostanzialmente equivalente. Vi è tuttavia una leggere differenza: vi sono problemi in cui è facile «divinare» la relazione di ricorrenza procedendo a ritroso (si riserva a queasti problemi l'aggettivo di ricorsivo)
Si supponga di avere n oggetti ordinati in sequenza (ad. Esempio n numeri naturali consecutivi); si vuole trovare il numero Pn di sottoinsiemi che non contengono due oggetti consecutivi.
Ad esempio per n=5

$$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}$$

Quindi P(5)=13.

Come affrontare il problema in generale (per un n qualunque) ?

Sia P(n) il numero di sottoinsiemi dell'insieme contenente n elementi che non contengono due oggetti consecutivi. Essi possono essere divisi in due categorie: la prima è quella dei sottoinsiemi che contengono anche il penultimo elemento n-1, la seconda è quella degli elementi che non contengono l'elemento n-1- esimo. Ovviamente il numero di sottoinsiemi della prima categoria è P(n-1) ; il numero degli elementi della seconda categoria è ovviamente P(n-2) perché ciascuna di tali insiemi dà luogo, aggiungendo il termine n-esimo, ad un insieme ammissibile del tipo $\underbrace{\{....,n-2,n\}}_{\text{sono P(n-2)}}$. La relazione ricorsiva diventa pertanto P(n)=P(n-1)+P(n-2) (e' Fibonacci !!).
Imponendo poi le ovvie condizioni iniziali P(1)=2 (l'insieme vuoto e l'insieme costituito dall'unico oggetto) e P(2)=3 (l'insieme vuoto e i «singleton») abbiamo la successione data per ricorrenza.

Bibliografia

- *Persone che contano* di G.Goldoni
- *Calcolo: teoria e applicazioni di F.Conti Ed. Mc Graw Hill*